Polytech'Lille Formation Ingénieur : Mécanique, CM3

Examen de Méthodes Numériques pour l'Ingénieur

Enseignants : Stefano Berti & Enrico Calzavarini

durée : 2h (documents autorisés)

8 juin 2015

Exercice 1

L'équation

$$x - 0.2\sin(x) = 0.5$$

admet une racine unique dans $[0, 1]$.

a) Vérifier que l'intervalle $[0, 1]$ encadre la racine.
b) Trouver la racine avec la précision $\epsilon = 10^{-3}$ en utilisant la méthode de Newton-Raphson. Utiliser comme point de départ : $x_0 = 0.5$.
c) Trouver la racine avec la précision $\epsilon = 10^{-1}$ en utilisant la méthode de bissection (dichotomie). Utiliser comme intervalle de départ : $[a_0, b_0] = [0, 1]$.

Questions bonus

d) Combien d'itérations seraient nécessaires pour calculer, avec la méthode de bissection, la racine avec la précision $\epsilon = 10^{-3}$? Estimer ce nombre d'itérations à priori, sans calculer toutes les approximations successives de la solution.
e) Vérifier que la convergence est possible pour les deux méthodes.

Exercice 2

Soit à résoudre un système linéaire $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -14 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Calculer la solution à l'aide de la méthode de Gauss (triangularisation + substitution en arrière).

Exercice 3

On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

a) Former la décomposition $L\,U$ de A, où L est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à l'unité et U est une matrice triangulaire supérieure.
b) Calculer le déterminant $D = det(A)$.

Question bonus

c) Utiliser la factorisation précédente pour résoudre le système linéaire $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec $\boldsymbol{b} = [1, 1, 1, 1]^T$.

Exercice 4

a) Adapter l'algorithme d'Euler au cas d'une équation différentielle du second ordre.
Donner en particulier les équations nécessaires pour résoudre numériquement le problème du mouvement d'un pendule réel soumis à un couple dépendant du temps :

$$\ddot{x}(t) + k^2 \sin\left(x(t)\right) = g(t).$$

b) On donne $g(t) = \sin(3t)$, $k = 2$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ et le pas de discrétisation $h = 0.15$.
Calculer numériquement $x(h)$ et $x(2h)$.