Polytech'Lille Formation Ingénieur : Mécanique, CM3

Examen de Méthodes Numèriques pour l'Ingénieur

Enseignants : Stefano Berti & Enrico Calzavarini

Durée : 2h (documents et calculatrice autorisés)

27 mars 2018

- Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
- L'examen étant relativement long, 22 points sont distribués pour une note finale sur 20.
- Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez-le sur votre copie et poursuivez l'exercice.

Exercice 1 (4 points)

En mécanique des fluides, l'équation de Rayleigh-Plesset est une équation différentielle ordinaire qui régit la dynamique d'une bulle sphérique, dans un milieu infini de fluide incompressible. Sa forme générale est généralement écrite comme

$$R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\nu}{R}\frac{dR}{dt} + \frac{2\gamma}{\rho R} + \frac{P(t)}{\rho} = 0$$

où ρ est la densité du liquide environnant, supposée constante, $R(t)$ est le rayon de la bulle, ν est la viscosité cinématique du liquide environnant, supposée constante, γ est la tension superficielle de l'interface bulle-liquide, $P(t)$ est la différence entre la pression dans la bulle, supposée être uniforme, et la pression externe à la bulle. Nous considérons ici un champ de pression oscillatoire avec la forme : $P(t) = P_0 sin(\omega\ t)$.

a) Discrétiser l'équation différentielle en utilisant la méthode d'Euler explicite (4 points).

Exercice 2 (8 points)

On donne les deux systèmes algébriques linéaires :

$$A)\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}\ ; \quad B)\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les solutions exactes par la méthode de Gauss (triangularisation + substitution en arrière ou en avant) avec la technique du pivotement partiel (4 points).

b) Résoudre le système A) par la méthode de Jacobi à partir du vecteur initial $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0)^T$, jusqu'au vecteur $\boldsymbol{x}^{(4)}$ inclus (faire au moins 4 itérations). (3 points)

c) Expliquer pour quelle raison la correcte résolution du systéme B) par la méthode de Jacobi n'est pas garantie (la résolution du systéme B par la méthode de Jacobi n'est pas demandée) (1 point).

Exercice 3 (2 points)

Le volume molaire V d'un gaz à température absolue T, sous la pression p, obéit à l'équation d'état de van der Waals

$$p + \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V - b}$$

avec R la constante universelle des gaz et a et b deux autres constantes dites respectivement terme de cohésion et covolume molaire.
a) Écrire la suite itérative pour le calcul de V en utilisant la méthode de Newton-Raphson (2 points).

Exercice 4 (8 points)

On se propose de calculer la plus petite valeur propre de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ce calcul se compose de deux étapes successives :

a) calcul de la matrice A^{-1} en utilisant la méthode de Gauss. Nous vous suggérons d'utiliser la notation de la matrice doublement augmentée $(A|I)$ (4 points) ;
b) calcul de la valeur propre dominante de A^{-1} par la méthode de la puissance itérée. La plus petite valeur propre de A sera obtenue en prenant l'inverse de la valuer propre calculée. Nous demandons d'utiliser la méthode de la puissance iterée de base, c'est-à-dire celle qui donne deux estimations de la valuer propre pour chaque itération, de prendre $\mathbf{q}^{(0)} = (1, 0)^T$ comme vecteur initial, et la norme infinie $||\mathbf{q}||_\infty = \sup_{i=1,N} |q_i|$ pour normaliser les vecteurs. Effectuer au moins 3 itérations (4 points).