Polytech'Lille Formation Ingénieur : Mécanique, CM3

Examen de Méthodes Numèriques pour l'Ingénieur

Enseignants : Stefano Berti & Enrico Calzavarini

Durée : 2h (documents et calculatrice autorisés)

23 avril 2019

- Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
- L'examen étant relativement long, **22 points** sont distribués pour une note finale sur 20.
- Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez-le sur votre copie et poursuivez l'exercice.

Exercice 1 (7 points)

En mécanique des solides, l'équation d'Euler-Bernoulli décrit la relation entre la flexion d'une poutre et la charge appliquée :

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) = q$$

La courbe $w(x)$ décrit la flexion de la poutre dans la direction z à une position x (la poutre est ici modélisée comme un objet unidimensionnel). q est une charge répartie, c'est-à-dire une force par unité de longueur (analogue de la pression qui est une force par unité de surface) ; elle peut avoir la forme d'une fonction de x, de w ou d'autres variables. Ici on prendra $q(x, w(x))$. E est le module d'élasticité et I est le moment quadratique de la section transversale de la poutre. Le produit EI, connu sous le nom de rigidité en flexion, sera pris ici comme constant.

a) Transformer l'équation différentielle du quatrième ordre dans un systéme différentiel du premier ordre. (4 points)

b) Discrétiser l'équation différentielle en utilisant la méthode d'Euler explicite. (2 points)

c) Discrétiser l'équation différentielle en utilisant la méthode du point au milieu. (1 point)

Exercice 2 (5 points)

On donne le système algébrique suivant pour les angles inconnus, α, β et γ avec $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ et $0 \leq \gamma \leq \pi$:

$$\begin{cases} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma = 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma = 2 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma = 9. \end{cases}$$

a) Calculer les solutions par la méthode de Gauss. Combien de solutions a ce système ? (4 points)

   Remarque : Reconnaître que ce problème a une forme équivalente à celle d'un système linéaire.

b) Expliquer pour quelle raison la correcte résolution du systéme par la méthode de Jacobi n'est pas garantie (la résolution du systéme par la méthode de Jacobi n'est pas demandée) (1 point).

Exercice 3 (5 points)

Dans l'étude de dimensionnement d'une conduite, on trouve que la valeur (en mètres) souhaitée du diamètre de la conduite est la solution de l'équation :

$$175,6\, D^4 = \frac{10 + 8D}{D}.$$

On se propose de résoudre cette équation par la méthode de bissection (ou de dichotomie).

a) Préciser le schéma itératif pour le calcul de D avec cette méthode et, ensuite, déterminer la solution D^* avec une précision $\epsilon = 0,1$ m, avec $D \in [0,3; 0,7]$ initialement. (3 points)

b) Combien d'itérations seraient nécessaires pour déterminer la solution avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$ m, soit de 1 mm, et le même intervalle initial ? (2 point)

Exercice 4 (7 points)

On se propose de calculer la valeur propre dominante λ_1 de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

a) Utiliser la méthode de la puissance itérée pour le clacul de λ_1 dans sa version de base, c'est-à-dire celle qui donne deux estimations de la valuer propre pour chaque itération, en prenant $\mathbf{q}^{(0)} = (1, 0)^T$ comme vecteur initial, et la norme infinie $||\mathbf{q}||_\infty = \sup_{i=1,N} |q_i|$ pour normaliser les vecteurs. Effectuer 4 itérations et vérifier que, *pour les deux estimations de la valeur propre*, la différence en valeur absolue de deux estimations successives $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|$ (où k est l'indice d'itération) est inférieure à $\epsilon = 0,2$. (4 points)

b) Déterminer λ_1, avec la même précision ϵ, en utilisant la méthode de la puissance itérée et le coefficient (ou quotient) de Rayleigh pour l'estimation de la valeur propre. Que peut-on remarquer ? (2 points)

   Remarque : Pour les calculs à faire ici il est possible d'exploiter une partie de ceux qui ont été faits au points a).

c) Donner l'expression de la matrice à utiliser dans le cadre de la méthode de la déflation pour déterminer la deuxième valeur propre de la matrice A. Pour l'application numérique il sera possible d'utiliser le vecteur propre calculé à la dernière itération au point a). (1 point)