Polytech'Lille Formation Ingénieur : Mécanique, CM3

Examen de Méthodes Numèriques pour l'Ingénieur

Enseignant : Stefano Berti & Enrico Calzavarini

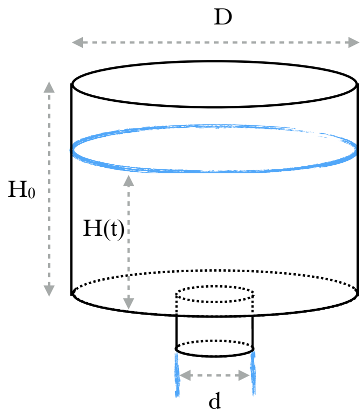
Durée : 2h (documents et calculatrice autorisés)

21 mars 2017

- Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
- Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez-le sur votre copie et poursuivez l'exercice.

Exercice 1 (10 points)

Une cuve se présente sous la forme d'un réservoir de forme cylindrique de diamètre $D = 4\ m$ et $H_0 = 10\ m$ de profondeur. Cette cuve est complètement remplie d'eau qui se vide par un orifice circulaire percé dans un fond horizontal débouchant à l'air libre et dont le diamètre vaut $d = 0,4\ m$ (voir la figure).



Si on considère négligeables les effets de frottement, l'équation qui décrit l'évolution du niveau d'eau en fonction du temps est la suivante :

$$\frac{d}{dt}H(t) = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g\ H(t)} \tag{1}$$

où $H(t)$ est la hauteur en mètres du niveau d'eau, t le temps en seconds et g l'accélération de la pesanteur. Dans cet exercice on utilisera la condition initiale $H(0) = H_0$ et la valeur approchée du paramètre $g \simeq 10\ m/s^2$.

a) Calculer à l'aide du Jacobien dans quel intervalle de valeurs de H le problème de Cauchy est stable (2 points).

b) Discrétiser l'équation différentielle en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) (4 points).

c) Trouver à l'aide de la méthode de RK2 la valeur de la hauteur H au temps $t = 1,5\ s$ avec un pas de discretisation $h = 0,5\ s$ (4 points).

Exercice 2 (10 points)

Soit à résoudre un système linéaire algébrique $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

a) Calculer la solution à l'aide de la méthode de décomposition LU (4 points).

b) Peut-on utiliser la méthode de décomposition de Cholesky pour la résolution de ce système linéaire ? Motiver votre réponse (3 points).

c) Construire la suite itérative de la méthode de Jacobi sous la forme matricielle : $\vec{x}_{(k+1)} = M \cdot \vec{x}_{(k)} + \vec{c}$ (donner l'expression de la matrice M et du vecteur $\vec{c}$) et vérifier la condition suffisante de convergence pour cette méthode (3 points).