Méthodes numériques pour l'ingénieur (Polytech'Lille, CM3)

Travaux Dirigés, Année 2014-2015

Enrico Calzavarini (bureau F128), Stefano Berti (bureau F110)

TD 4 : Valeurs et vecteurs propres

Problème 1

L'état de contrainte dans un solide est défini par le tenseur suivant (en MPa) dans une base donnée :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le but est de déterminer la plus grande contrainte principale dans ce solide. Elle correspond à la valeur propre maximale de la matrice ci-dessus. On la déterminera par la méthode de la puissance itérée, en partant du vecteur initial $\boldsymbol{q}_0 = (1, 1/2, 1)^T$. On utilisera la norme infinie pour normaliser les vecteurs : $||\boldsymbol{q}||_\infty = \sup_{i=1,n}|q_i|$

a) Faire 4 pas de la méthode et préciser les approximations $\boldsymbol{q}_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

b) Calculer aussi l'estimation $\lambda^{(k)}_{(j)}$ de la valeur propre cherchée à chaque itération k (pour chaque élément $j = 1, 2, 3$ du vecteur propre).

Résolution

première itération $(k = 1)$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{q}_0 = \begin{pmatrix} 5 + 5/2 + 0 \\ 5 + 0 + 5 \\ 0 + 5/2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/2 \\ 10 \\ 15/2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||_\infty} = \begin{pmatrix} 15/2 \\ 10 \\ 15/2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(k=1)}_{(j=1)} = \frac{(\boldsymbol{q}_1)_{j=1}}{(\boldsymbol{q}_0)_{j=1}} = \frac{3}{4}\ ; \quad \lambda^{(k=1)}_{(j=2)} = \frac{(\boldsymbol{q}_1)_{j=2}}{(\boldsymbol{q}_0)_{j=2}} = 1 \cdot 2 = 2\ ; \quad \lambda^{(k=1)}_{(j=3)} = \frac{(\boldsymbol{q}_1)_{j=3}}{(\boldsymbol{q}_0)_{j=3}} = \frac{3}{4}$$

deuxième itération ($k = 2$) :

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 15/4 + 5 \\ 15/4 + 15/4 \\ 5 + 15/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35/4 \\ 15/2 \\ 35/4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{||\boldsymbol{v}_2||_\infty} = \begin{pmatrix} 35/4 \\ 15/2 \\ 35/4 \end{pmatrix} \cdot \frac{4}{35} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6/7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(k=2)}_{(j=1)} = \frac{(\boldsymbol{q}_2)_{j=1}}{(\boldsymbol{q}_1)_{j=1}} = \frac{4}{3}\ ; \quad \lambda^{(k=2)}_{(j=2)} = \frac{(\boldsymbol{q}_2)_{j=2}}{(\boldsymbol{q}_1)_{j=2}} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{7}\ ; \quad \lambda^{(k=2)}_{(j=3)} = \frac{(\boldsymbol{q}_2)_{j=3}}{(\boldsymbol{q}_1)_{j=3}} = \frac{4}{3}$$

troisième itération ($k = 3$) :

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 5 + 30/7 + 0 \\ 5 + 0 + 5 \\ 0 + 30/7 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65/7 \\ 10 \\ 65/7 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3}{||\boldsymbol{v}_3||_\infty} = \begin{pmatrix} 65/7 \\ 10 \\ 65/7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} = \begin{pmatrix} 13/14 \\ 1 \\ 13/14 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(k=3)}_{(j=1)} = \frac{(\boldsymbol{q}_3)_{j=1}}{(\boldsymbol{q}_2)_{j=1}} = \frac{13}{14}\ ; \quad \lambda^{(k=3)}_{(j=2)} = \frac{(\boldsymbol{q}_3)_{j=2}}{(\boldsymbol{q}_2)_{j=2}} = \frac{7}{6}\ ; \quad \lambda^{(k=3)}_{(j=3)} = \frac{(\boldsymbol{q}_3)_{j=3}}{(\boldsymbol{q}_2)_{j=3}} = \frac{13}{14}$$

quatrième itération ($k = 4$) :

$$\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} 5 \cdot 13/14 + 5 \\ 5 \cdot 13/14 + 5 \cdot 13/14 \\ 5 + 5 \cdot 13/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135/14 \\ 130/14 \\ 135/14 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_4 = \frac{\boldsymbol{v}_4}{||\boldsymbol{v}_4||_\infty} = \begin{pmatrix} 135/14 \\ 130/14 \\ 135/14 \end{pmatrix} \cdot \frac{14}{135} = \begin{pmatrix} 1 \\ 26/27 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(k=4)}_{(j=1)} = \frac{(\boldsymbol{q}_4)_{j=1}}{(\boldsymbol{q}_3)_{j=1}} = \frac{14}{13}\ ; \quad \lambda^{(k=4)}_{(j=2)} = \frac{(\boldsymbol{q}_4)_{j=2}}{(\boldsymbol{q}_3)_{j=2}} = \frac{26}{27} \cdot 1 = \frac{26}{27}\ ; \quad \lambda^{(k=4)}_{(j=3)} = \frac{(\boldsymbol{q}_4)_{j=3}}{(\boldsymbol{q}_3)_{j=3}} = \frac{14}{13}$$

La valeur de $\lambda^{(k)}_{(j=2)}$ oscille autour de la valeur 1 et en devient de plus en plus proche à chaque itération k. Les valeurs $\lambda^{(k)}_{(j=1)} = \lambda^{(k)}_{(j=3)}$ se comportent de la même manière. Nous estimons donc que la plus grande valeur propre de la matrice $\boldsymbol{\sigma}$ est $\lambda = 1$. Le comportement des trois estimations ($j = 1, 2, 3$) de la valeur propre en fonction du nombre d'itérations est montré dans le graphique de la Fig. 1 (où des approximations à 6 chiffres décimaux sont utilisées pour les valeurs fractionnaires).

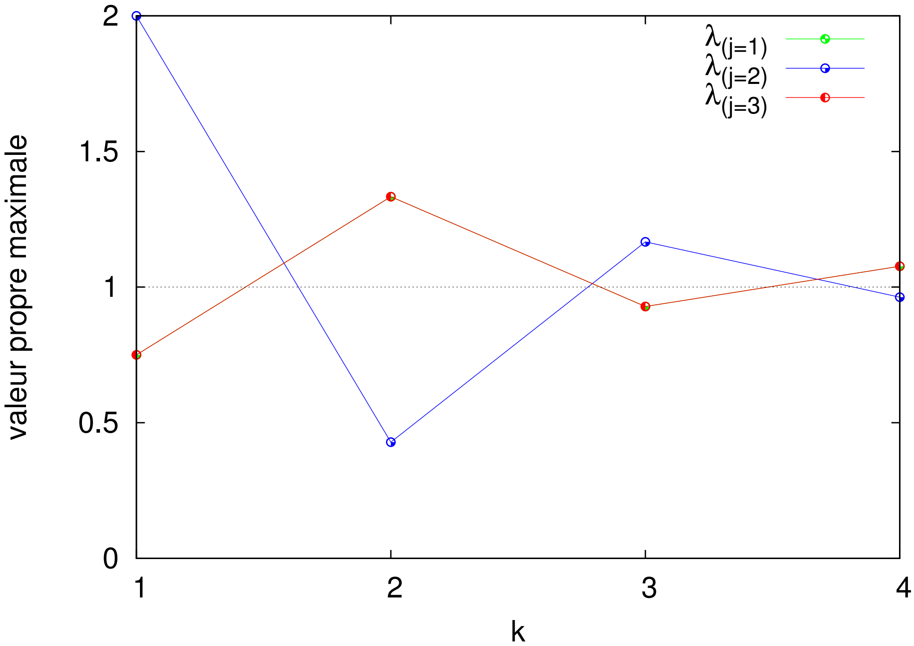

Figure 1 Comportement des trois estimations ($j = 1, 2, 3$) de la valeur propre maximale en fonction du nombre d'itérations.

Problème 2

Trouver toutes les valeurs propres de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer la première valeur propre par la méthode de la puissance itérée, en partant du vecteur initial $\boldsymbol{q}_0 = (1,0)^T$. Ici on utilisera la norme euclidienne $||\boldsymbol{q}||_2 = \sqrt{\Sigma_{i=1}^n q_i^2}$ pour normaliser les vecteurs $\boldsymbol{q}_k$ (k est l'indice d'itération) ainsi que le quotient de Rayleigh pour l'estimation de la valeur propre à chaque itération. Faire au moins 4 itérations.

b) Déterminer par calcul direct (analytiquement) le vecteur propre associé à la valeur propre trouvée.

c) Déterminer la seconde valeur propre en utilisant la méthode de déflation.

Résolution

a)

Estimation initiale de la valeur propre ($k=0$), avec le quotient de Rayleigh :

$$\lambda^{(k=0)} = \frac{\boldsymbol{q}_0^T A \boldsymbol{q}_0}{\boldsymbol{q}_0^T \boldsymbol{q}_0} = 3$$

première itération ($k=1$) :

$$\boldsymbol{v}_1 = A\ \boldsymbol{q}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{9+1}} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(k=1)} = \frac{\boldsymbol{q}_1^T A \boldsymbol{q}_1}{\boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{q}_1} = \frac{24}{10} = 2.4$$

deuxième itération ($k=2$) :

$$\boldsymbol{v}_2 = A\ \boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 7/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{||\boldsymbol{v}_2||_2} = \begin{pmatrix} 7/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{49+9}} = \begin{pmatrix} 7/\sqrt{58} \\ -3/\sqrt{58} \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(k=2)} = \frac{\boldsymbol{q}_2^T A \boldsymbol{q}_2}{\boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{q}_2} = \frac{126}{58} = 2.1724$$

troisième itération ($k = 3$) :

$$\boldsymbol{v}_3 = A\ \boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 15/\sqrt{58} \\ -7/\sqrt{58} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3}{||\boldsymbol{v}_3||_2} = \begin{pmatrix} 15/\sqrt{58} \\ -7/\sqrt{58} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{58}}{\sqrt{15^2+7^2}} = \begin{pmatrix} 15/\sqrt{274} \\ -7/\sqrt{274} \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(k=3)} = \frac{\boldsymbol{q}_3^T A \boldsymbol{q}_3}{\boldsymbol{q}_3^T \boldsymbol{q}_3} = \frac{570}{274} = 2.080$$

quatrième itération ($k = 4$) :

$$\boldsymbol{v}_4 = A\ \boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} 31/\sqrt{274} \\ -15/\sqrt{274} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_4 = \frac{\boldsymbol{v}_4}{||\boldsymbol{v}_4||_2} = \begin{pmatrix} 31/\sqrt{274} \\ -15/\sqrt{274} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{274}}{\sqrt{31^2+15^2}} = \begin{pmatrix} 31/\sqrt{1186} \\ -15/\sqrt{1186} \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(k=4)} = \frac{\boldsymbol{q}_4^T A \boldsymbol{q}_4}{\boldsymbol{q}_4^T \boldsymbol{q}_4} = \frac{2418}{1186} = 2.0388$$

La plus grande valeur propre de la matrice A (dorénavant nommée λ_1) approche la valeur 2.

b) Ici nous faisons l'hypothèse que la valeur asymptotique de λ_1 (atteint par la méthode de la puissance iterée) est bien $\lambda_1 = 2$, et nous calculons le vecteur propre correspondant $\boldsymbol{x}_1 = [a, b]^T$.

$$A\ \boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= 2a \\ -a &= 2b \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a = -2b$$

$$\boldsymbol{x}_1 = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et avec normalisation (en choisissant } b = 1) \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

c)

Rappels sur la méthode de la déflation :

- On suppose connu le couple $(\lambda_1, \boldsymbol{x}_1)$, calculé à partir de la puissance itérée.
- On forme la matrice $A^{(1)} = A - \lambda_1 \frac{\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_1^T}{\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_1}$ (qui possède les mêmes valeurs propres que la précédente sauf λ_1 qui est remplacée par 0).

- On applique la méthode de la puissance itérée à $A^{(1)}$ pour trouver le couple $(\lambda_2, \boldsymbol{x}_2)$ où λ_2 est la valeur propre de plus grand module de $A^{(1)}$ et $\boldsymbol{x}_2$ le vecteur propre associé.

$$A^{(1)} = A - \lambda_1 \frac{\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_1^T}{\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 & 14/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix}.$$

Estimation initiale de la valeur propre (k=0), avec le quotient de Rayleigh :

$$\lambda_2^{(k=0)} = \frac{\boldsymbol{q}_0^T A^{(1)} \boldsymbol{q}_0}{\boldsymbol{q}_0^T \boldsymbol{q}_0} = 7/5 = 3.5$$

itération $k = 1$:

$$\boldsymbol{v}_1 = A^{(1)}\ \boldsymbol{q}_0 = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||_2} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{50/25}} = \begin{pmatrix} 7/(5\sqrt{2}) \\ -1/(5\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2^{(k=1)} = \frac{\boldsymbol{q}_1^T A^{(1)} \boldsymbol{q}_1}{\boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{q}_1} = 1$$

itération $k = 2$:

$$\boldsymbol{v}_2 = A^{(1)}\ \boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 7/(5\sqrt{2}) \\ -1/(5\sqrt{2}) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{||\boldsymbol{v}_2||_2} = \ \boldsymbol{q}_1 \Rightarrow \text{le processus est donc convergé !}$$

$$\lambda_2^{(k=2)} = \frac{\boldsymbol{q}_2^T A^{(1)} \boldsymbol{q}_2}{\boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{q}_2} = 1$$

La deuxiéme valut propre est $\lambda_2 = 1$.