Méthodes numériques pour l'ingénieur (Polytech'Lille, CM3)

Travaux Dirigés

Enrico Calzavarini (bureau F128), Stefano Berti (bureau F110)

TD 3 : Systèmes linéaires

Problème 1

Résoudre avec la méthode de Gauss le système $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, pour :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Résolution :

On utilise la notation de la matrice augmentée $(A|\boldsymbol{b})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 3 & -7 & -9 \\ 4 & 1 & -2 & 8 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

L'élément en positon a_{11} est le premier pivot, donc le pivot est $a_{11} = 2$.

Transformations de ligne :

$$L_2 \to L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$$

$$L_3 \to L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1$$

$$L_4 \to L_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}} L_1$$

d'où :

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Noter que $a_{22} = 0$, on ne peut pas choisir cet élément comme deuxième pivot. Pour remédier à ça on doit faire un échange de lignes :

$$L_2 \longleftrightarrow L_3$$

et on prend le nouveau élément a_{22} (ancien élément a_{32}) comme nouveau pivot. Vu que la nouvelle L_3 a déjà l'élément nul où il faut (c'est-à-dire en position a_{32}) on fait une transformation de ligne seulement sur L_4 :

$$L_4 \to L_4 - \frac{a_{42}}{a_{22}} L_3$$

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

Le nouveau pivot est $a_{33} = 3$, et la transformation correspondante est :

$$L_4 \to L_4 - \frac{a_{43}}{a_{33}} L_2$$

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

La matrice A est triangulaire supérieure. Par substitution en arrière on obtient :

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Problème 2

Résoudre avec la méthode de Gauss, en utilisant 10 chiffres dans la mantisse (= nombre de chiffres après la virgule), le système suivant :

$$\begin{cases} 10^{-12}x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Montrer que si l'on suit l'ordre naturel (systématique) des pivots, on obtient un résultat faux. Utiliser ensuite la stratégie du pivot partiel.

Résolution :

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 10^{-12} & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Pivot $a_{11} = 10^{-12}$

$$L_2 \to L_2 - \frac{1}{10^{-12}} L_1$$

de facçon plus explicite :

$$\begin{aligned} L_2 - \frac{1}{10^{-12}} L_1 &= (1,\ 2,\ -1,\ 2) - 10^{12}(10^{-12},\ 1,\ 1,\ 2) \\ &= (1-1,\ 2-10^{12},\ -1-10^{12},\ 2-2\cdot 10^{12}) \\ &\simeq (0,\ -10^{12},\ -10^{12},\ -2\cdot 10^{12}) \end{aligned}$$

Cette dernière ligne est une conséquence de la précision finie (à 10 chiffres) de nos calculs.

$$L_3 \to L_3 - \frac{-1}{10^{-12}} L_1$$

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 10^{-12} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -10^{12} & -10^{12} & -2 \cdot 10^{12} \\ 0 & 10^{12} & 10^{12} & 2 \cdot 10^{12} \end{array}\right)$$

Pivot $a_{22} = -10^{12}$

$$L_3 \to L_3 - \frac{10^{12}}{-10^{12}} L_2$$

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 10^{-12} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -10^{12} & -10^{12} & -2 \cdot 10^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ce dernier système fournit comme solution :

x_3 quelconque, $x_2 = 2 - x_3$ et $x_1 = 0$, ce qui est faux.

Si l'on utilise une stratégie de pivotement partiel, on obtient les résultats suivants :

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 10^{-12} & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Choix du premier pivot :} \quad a_{21} = 1 \Rightarrow \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \to L_1 - \frac{10^{-12}}{1} L_2$$

$$L_3 \to L_3 - \frac{-1}{1} L_2$$

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pivot} \quad a_{32} = 3 \Rightarrow \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \to L_1 - \frac{1}{3} L_3$$

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En effectuant la substitution arrière dans l'ordre indiqué par le vecteur pivotal (équation 1, puis 3, puis 2), on trouve successivement $x_3 = 1$, $x_2 = 1$ et $x_1 = 1$, ce qui est une solution satisfaisante si l'on travaille avec 10 chiffes dans la mantisse puisque la solution exacte est

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 - 10^{-12} \simeq 0.999999999999 \\ 1 \\ 1 - 10^{-12} \simeq 0.999999999999 \end{pmatrix}$$

On constate l'effet bénéfique de la stratégie du pivotement partiel.

Problème 3

Calculer la matrice inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

avec la méthode de triangularisation (Gauss) appliquée à la matrice triplement augmentée $(A|I)$ où I est la matrice identité 3×3.

Résolution :

Appliquons la procédure de triangularisation à la matrice triplement augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_1$$

$$L_3 \to L_3 - \frac{1}{2}L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \to L_3 - \frac{1/2}{-1/2}L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La première colonne de la matrice inverse recherchée sera donc la solution de

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On procede de la même façon pour les deux autres colonnes

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{31} \\ b_{32} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} b_{31} \\ b_{32} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse cherchée s'écrit donc

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problème 4

Soit à résoudre un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \\ 8 & -14 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer la factorisation LU correspondant à la matrice A ci-dessus, et résoudre ensuite en 2 étapes le système résultant $LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

b) Calculer le déterminant de A.

Résolution :

a) Factorisation LU par

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \\ 8 & -14 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour la resolution de $L\,U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ on pose $\boldsymbol{z} = U\boldsymbol{x}$ et on cherche la solution de $L\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$, ensuite on résout $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ avec le vecteur $\boldsymbol{z}$ determiné a l'étape précédente.

$$Lz = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 29 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcul du determinant

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(L) \cdot \text{Det}(U) = \Pi_{i=1}^{N} l_{ii} \cdot \Pi_{i=1}^{N} u_{ii} = 1 \cdot \Pi_{i=1}^{N} u_{ii} = 2 \cdot 5 \cdot (-1) = -10$$

Problème 5

Nous voulons résoudre le système ci-dessous avec la méthode de Jacobi. Ecrire le schéma itératif pour cette méthode. Vérifiez la condition suffisante de convergence (matrice à diagonale strictement dominante).

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = -10 \\ x_2 + 10x_3 = -11 \end{cases}$$

Résolution :

La matrice A et le vecteur $\boldsymbol{b}$ associés au problème sont :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ -11 \end{pmatrix}$$

La matrice A est a dominance strictement diagonale si :

$$|a_{ii}| > \Sigma_{j=1, j\neq i}^{N} |a_{ij}| \quad \forall i$$

Ici :

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| \Rightarrow 10 > 1 + 0 \Rightarrow \ vrai$$

$$|a_{22}| > |a_{22}| + |a_{23}| \Rightarrow 10 > 1 + 1 \Rightarrow \ vrai$$

$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| \Rightarrow 10 > 0 + 1 \Rightarrow \ vrai$$

La condition suffisante de convergence est donc verifiée.

La méthode de Jacobi s'écrit :

$$\boldsymbol{x}_{(k+1)} = M_J \ \boldsymbol{x}_{(k)} + \boldsymbol{c}_J$$

avec

$$M_J = D^{-1}\,(D - A) \qquad \boldsymbol{c}_J = D^{-1}\boldsymbol{b} \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

ici

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}$$

donc

$$M_J = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1/10 & 0 \\ -1/10 & 0 & -1/10 \\ 0 & -1/10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_J = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 \\ -1 \\ -11/10 \end{pmatrix}$$

Le schéma itératif est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/10 & 0 \\ -1/10 & 0 & -1/10 \\ 0 & -1/10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{(k)} + \begin{pmatrix} 9/10 \\ -1 \\ -11/10 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned} x_{1\ (k+1)} &= -0.1\ x_{2\ (k)} + \ 0.9 \\ x_{2\ (k+1)} &= -0.1\ x_{1\ (k)} - \ 0.1\ x_{3\ (k)}\ - 1 \\ x_{3\ (k+1)} &= -0.1\ x_{2\ (k)} - \ 1.1 \end{aligned}$$