Méthodes numériques pour l'ingénieur (Polytech'Lille, CM3)

Travaux Dirigés

Enrico Calzavarini (bureau F128), Stefano Berti (bureau F110)

TD 3 : Systèmes linéaires

Problème 1

Résoudre avec la méthode de Gauss le système $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, pour :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Problème 2

Résoudre avec la méthode de Gauss, en utilisant 10 chiffres dans la mantisse (= nombre de chiffres après la virgule), le système suivant :

$$\begin{cases} 10^{-12}x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Montrer que si l'on suit l'ordre naturel (systématique) des pivots, on obtient un résultat faux. Utiliser ensuite la stratégie du pivot partiel.

Problème 3

Calculer la matrice inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

avec la méthode de triangularisation (Gauss) appliquée à la matrice triplement augmentée $(A|I)$ où I est la matrice identité 3×3.

Problème 4

Soit à résoudre un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \\ 8 & -14 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer la factorisation LU correspondant à la matrice A ci-dessus, et résoudre ensuite en 2 étapes le système résultant $LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

b) Calculer le déterminant de A.

Problème 5

Nous voulons résoudre le système ci-dessous avec la méthode de Jacobi. Ecrire le schéma itératif pour cette méthode. Vérifiez la condition suffisante de convergence (matrice à diagonale strictement dominante).

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = -10 \\ x_2 + 10x_3 = -11 \end{cases}$$