

# Méthodes numériques pour l'ingénieur (Polytech'Lille, CM3)

## Travaux Dirigés

Enrico Calzavarini (bureau F128), Stefano Berti (bureau F110)

### Corrigé du TD 2 : Equations différentielles ordinaires

#### Exercice 1

On considère le problème de Cauchy:  $y' = \lambda y; y(0) = y_0$ .

a) Montrer que la méthode d'Euler explicite appliquée à ce problème donne la solution

$$y_n = y_0 (1 + h\lambda)^n$$

b) Montrer que la méthode d'Euler implicite appliquée à ce problème donne la solution

$$y_n = y_0 \frac{1}{(1 - h\lambda)^n}$$

c) Nous posons  $\lambda = 3$  et  $y_0 = 1/2$ . Comparer pour  $x = 1$  la solution exacte du problème de Cauchy avec les résultats des deux méthodes ci-dessus (avec le choix du pas de discrétisation  $h = 1/10$ ). Quelle méthode donne le meilleur résultat?

d) On pose  $\lambda = 1$ ,  $y_0 = 1$  et  $h = 2$ . Comparer les solutions obtenues par chacune des deux méthodes. Quelle méthode vous paraît la meilleure?

#### Solution :

a) **Euler explicite**

$$y' = f(x, y), y' = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}, f(x, y) = f(x_n, y_n)$$

donc:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

ici  $f(x_n, y_n) = \lambda y_n$ , donc

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n$$

$$\text{si } n = 1 \Rightarrow y_1 = (1 + h\lambda)y_0$$

$$\text{si } n = 2 \Rightarrow y_2 = (1 + h\lambda)y_1 = (1 + h\lambda)^2 y_0$$

$$\text{d'où } y_n = (1 + h\lambda)^n y_0$$

$$\text{plus en général: } y_n = (1 + h\lambda)y_{n-1} = (1 + h\lambda)^2 y_{n-2} = \dots = (1 + h\lambda)^n y_0$$

**b) Euler implicite**

$$y' = f(x, y), y' = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}, f(x, y) = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

donc:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

ici  $f(x_{n+1}, y_{n+1}) = \lambda y_{n+1}$ , donc

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1}$$

Cette relation est implicite, mais elle peut être facilement rendue explicite grâce au fait que  $f(x, y)$  est une fonction linéaire de  $y$ . Dans ce cas particulier, il n'est pas nécessaire de recourir à une méthode itérative pour calculer  $y_{n+1}$ :

$$(1 - h\lambda)y_{n+1} = y_n$$

et donc

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_n.$$

Comme dans le cas précédent, par itération nous obtenons:

$$y_n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^n} y_0$$

**c)** La solution analytique est  $y(x) = C e^{\lambda x}$  avec  $y_0 = y(0) = C$ . Donc:

$$y(x) = y_0 e^{\lambda x}$$

$$\text{avec } y_0 = 1/2 \text{ et } \lambda = 3 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2} e^{3x}.$$

$$\text{En } x = 1 \text{ on a } y(1) = \frac{1}{2} e^3 = 10.043.$$

$$\text{Euler explicite: } n = 10 \text{ et } h = 1/10 \text{ (} x = 1 \text{)} \Rightarrow y = \frac{1}{2} (1 + 0.1 \cdot 3)^{10} = 6.893$$

$$\text{Euler implicite: } n = 10 \text{ et } h = 1/10 \text{ (} x = 1 \text{)} \Rightarrow y = \frac{1}{2} (1 - 0.1 \cdot 3)^{-10} = 17.700$$

Meilleur résultat: méthode explicite, dû à la forme de la fonction  $f(x, y) = \lambda y$ .

d)  $\lambda = 1, y_0 = 1, h = 2$

En  $x = 4$  on a  $y(4) = 1 \cdot e^4 \simeq (2.718)^4 \simeq 55$ .

**Euler explicite:**  $n = 2$  et  $h = 2$  ( $x = 4$ )  $\Rightarrow y = 1 \cdot (1 + 2 \cdot 1)^2 = 9$

**Euler implicite:**  $n = 2$  et  $h = 2$  ( $x = 4$ )  $\Rightarrow y = 1 \cdot (1 - 2 \cdot 1)^{-2} = (-1)^{-2} = 1$

Meilleur résultat: méthode explicite, dû à la forme de la fonction  $f(x, y) = \lambda y$ . En fait, la solution approchée donnée par le schéma d'Euler explicite reste "raisonnable" même pour des pas de discrétisation relativement grands. Ici, la grande différence par rapport à la solution exacte est due au fait que  $h > 1/\lambda$ , donc avec cette valeur du pas de discrétisation on ne peut pas réellement résoudre les variations de  $y$  en fonction de  $x$ .

En ce qui concerne le schéma implicite, d'une part il n'est pas défini pour  $h = 1$ , d'autre part, si l'on choisit un pas de discrétisation  $h$  proche de 1 (inférieurement ou supérieurement), la solution approchée "explose" rapidement! Enfin, pour  $h = 2$ , comme ici, on perd la propriété de positivité de la solution exacte!

## Exercice 2

On doit résoudre l'équation  $y' = \sin y$  sur l'intervalle  $[0, 2]$  avec  $y(0) = 1$ . Pour la résolution, utiliser la méthode d'Euler implicite à l'aide d'un processus itératif : considérer **a)** la méthode d'approximations successives et **b)** la méthode de Newton-Raphson. Écrire les schémas itératifs.

### Solution :

Le schéma d'Euler implicite est  $y_{k+1} = y_k + h \sin y_{k+1}$ . Cette relation est implicite, et elle ne peut pas être rendue explicite car  $f(x, y)$  est une fonction non linéaire de  $y$ . Dans ce cas il est donc nécessaire de recourir à une méthode itérative pour calculer  $y_{k+1}$  à chaque itération  $k$  :

#### a) Méthode d'approximations successives (MAS)

$$y_{k+1} = F(y_{k+1}) \text{ avec } F(y_{k+1}) = y_k + h \sin y_{k+1}.$$

Le schéma itératif est:

$$y_{k+1}^{(m+1)} = F\left(y_{k+1}^{(m)}\right) = y_k + h \sin y_{k+1}^{(m)}$$

où  $m$  est l'indice d'itération de la MAS.

Dans la MAS, la valeur initiale correspondant à  $m = 0$  (c'est-à-dire la première estimation de  $y_{k+1}$ ), est  $y_{k+1}^{(0)} = y_k$ .

Enfin nous décidons de terminer les itérations lorsque le critère d'arrêt sur l'erreur relative est respecté

$$\left| y_{k+1}^{(m+1)} - y_{k+1}^{(m)} \right| \leq \epsilon \left| y_{k+1}^{(m+1)} \right|$$

avec  $\epsilon$  petit :  $\epsilon = 10^{-6}$ .

#### b) Méthode de Newton-Raphson

$$y_{k+1} = F(y_{k+1}) \text{ avec } F(y_{k+1}) = y_k + h \sin y_{k+1}.$$

Pour chaque itération  $k$  il faut chercher le zéro  $y_{k+1}$  de la fonction  $g(y_{k+1})$  :

$$g(y_{k+1}) = 0 \text{ avec } g(y_{k+1}) = y_{k+1} - y_k - h \sin y_{k+1}.$$

La méthode de Newton-Raphson donne, donc, le schéma itératif suivant qui permet de déterminer  $y_{k+1}$ :

$$y_{k+1}^{(m+1)} = y_{k+1}^{(m)} - \frac{g\left(y_{k+1}^{(m)}\right)}{g'\left(y_{k+1}^{(m)}\right)},$$

où  $m$  est l'indice d'itération de la méthode de Newton-Raphson.

Vu que  $g'(y_{k+1}^{(m)}) = 1 - h \cos y_{k+1}$ , on obtient :

$$y_{k+1}^{(m+1)} = y_{k+1}^{(m)} - \frac{y_{k+1}^{(m)} - y_k - h \sin y_{k+1}^{(m)}}{1 - h \cos y_{k+1}^{(m)}}.$$

Nous pouvons remarquer que cette procédure est équivalente à chercher le point fixe de  $y_{k+1} = G(y_{k+1})$ :

$$y_{k+1}^{(m+1)} = G(y_{k+1}^{(m)}) \quad \text{avec} \quad G(y_{k+1}^{(m)}) = y_{k+1}^{(m)} - \frac{g(y_{k+1}^{(m)})}{g'(y_{k+1}^{(m)})}$$

Finalment, on peut montrer que la méthode de Newton-Raphson converge plus vite que la MAS.

**Exercice 3**

Transformez l'équation différentielle

$$g''(x) + \frac{g'(x)}{x} + g(x) = 0,$$

associée aux conditions initiales  $g(0) = 1$  et  $g'(0) = 2$ , afin d'obtenir un système de 2 équations d'ordre 1 du type:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x) \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x = 0).$$

Formulez les conditions initiales du problème.

**Solution :**

On pose  $z(x) = g'(x) \Rightarrow z'(x) + \frac{z(x)}{x} + g(x) = 0$ , donc

$$\begin{cases} g'(x) = z(x) \\ z'(x) = -\frac{z(x)}{x} - g(x) \end{cases}$$

Maintenant on définit le vecteur  $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{z(x)}{x} \\ -\frac{z(x)}{x} - g(x) \end{pmatrix}$  d'où :

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x)$$

avec les conditions initiales  $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} g(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Exercice 4**

Calculer les deux premières solutions approchées  $y_1$  et  $y_2$  (pour  $x = h$  et  $x = 2h$  respectivement) de l'équation

$$y' = f(x, y(x)) \quad \text{où} \quad f(x, y(x)) = x + y$$

pour la condition initiale  $x_0 = 0$ ,  $y(x_0) = y_0 = 1$  et le pas  $h = 1$ , en appliquant (séparément) les deux schémas itératifs ci-dessous:

a) la méthode Runge-Kutta d'ordre 2 standard

$$y_{n+1} = y_n + h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h f(x_n, y_n)\right)$$

b) une variante de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h \left[ f(x_n, y_n) + 3f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}h f(x_n, y_n)\right) \right]$$

Comparer les résultats obtenus avec la solution analytique  $y(x) = 2e^x - x - 1$ .

**Solution :**

a)

$$y_{n+1} = y_n + h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h f(x_n, y_n)\right)$$

où  $f(x, y) = x + y$ .

$$\text{pour } n = 1 \Rightarrow y_1 = y_0 + h f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}h f(x_0, y_0)\right)$$

$$= 1 + 1 \cdot f\left(0 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = 1 + 1 \cdot f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

$$\text{pour } n = 2 \Rightarrow y_2 = y_1 + h f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}h f(x_1, y_1)\right)$$

$$= 3 + 1 \cdot f\left(1 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{4}{2}\right) = 3 + 1 \cdot f\left(\frac{3}{2}, 5\right) = 3 + \frac{3}{2} + 5 = \frac{19}{2} = 9.5$$

b)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h \left[ f(x_n, y_n) + 3f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}h f(x_n, y_n)\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
\text{pour } n = 1 \Rightarrow y_1 &= y_0 + \frac{1}{4} [f(x_0, y_0) + 3f(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}hf(x_0, y_0))] = \\
&= 1 + \frac{1}{4} \left[ f(0, 1) + 3f\left(0 + \frac{2}{3}, 1 + \frac{2}{3}f(0, 1)\right) \right] = \\
&= 1 + \frac{1}{4} \left[ 1 + 3f\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \right] = 1 + \frac{1}{4} \left[ 1 + 3\frac{7}{3} \right] = 1 + \frac{1}{4}8 = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{pour } n = 2 \Rightarrow y_2 &= y_1 + \frac{1}{4} [f(x_1, y_1) + 3f(x_1 + \frac{2}{3}h, y_1 + \frac{2}{3}hf(x_1, y_1))] = \\
&= 3 + \frac{1}{4} \left[ f(1, 3) + 3f\left(1 + \frac{2}{3}, 3 + \frac{2}{3}f(1, 3)\right) \right] = \\
&= 3 + \frac{1}{4} \left[ 4 + 3f\left(\frac{5}{3}, \frac{17}{3}\right) \right] = \\
&= 3 + 1 + \frac{3 \cdot 22}{4 \cdot 3} = 4 + \frac{11}{2} = \frac{19}{2} = 9.5
\end{aligned}$$

La solution exacte est

$$y(x) = 2e^x - x - 1$$

$$y(1) = 2e - 1 - 1 = 2e - 2 \simeq 3.44$$

$$y(2) = 2e^2 - 2 - 1 = 2e^2 - 3 \simeq 11.78$$