Méthodes numériques pour l'ingénieur (Polytech'Lille, CM3)

Travaux Dirigés

Enrico Calzavarini (bureau F128), Stefano Berti (bureau F110)

TD 2 : Equations différentielles ordinaires

Exercice 1

On considère le problème de Cauchy: $y' = \lambda y;\ y(0) = y_0$.

a) Montrer que la méthode d'Euler explicite appliquée à ce problème donne la solution

$$y_n = y_0\ (1 + h\lambda)^n$$

b) Montrer que la méthode d'Euler implicite appliquée à ce problème donne la solution

$$y_n = y_0 \frac{1}{(1 - h\lambda)^n}$$

c) Nous posons $\lambda = 3$ et $y_0 = 1/2$. Comparer pour $x = 1$ la solution exacte du problème de Cauchy avec les résultats des deux méthodes ci-dessus (avec le choix du pas de discrétisation $h = 1/10$). Quelle méthode donne le meilleur résultat?

d) On pose $\lambda = 1$, $y_0 = 1$ et $h = 2$. Comparer les solutions obtenues par chacune des deux méthodes. Quelle méthode vous paraît la meilleure?

Exercice 2

On doit résoudre l'équation $y' = \sin y$ sur l'intervalle $[0, 2]$ avec $y(0) = 1$. Pour la résolution, utiliser la méthode d'Euler implicite à l'aide d'un processus itératif : considérer **a)** la méthode d'approximations successives et **b)** la méthode de Newton-Raphson. Écrire les schémas itératifs.

Exercice 3

Transformez l'équation différentielle

$$g''(x) + \frac{g'(x)}{x} + g(x) = 0,$$

associée aux conditions initiales $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$, afin d'obtenir un système de 2 équations d'ordre 1 du type:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} = 0).$$

Formulez les conditions initiales du problème.

Exercice 4

Calculer les deux premières solutions approchées y_1 et y_2 (pour $x = h$ et $x = 2h$ respectivement) de l'équation

$$y' = f(x, y(x)) \qquad \text{où} \qquad f(x, y(x)) = x + y$$

pour la condition initiale $x_0 = 0$, $y(x_0) = y_0 = 1$ et le pas $h = 1$, en appliquant (séparément) les deux schémas itératifs ci-dessous:

a) la méthode Runge-Kutta d'ordre 2 standard

$$y_{n+1} = y_n + h\ f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h\ f(x_n, y_n))$$

b) une variante de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h\left[f(x_n, y_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n))\right]$$

Comparer les résultats obtenus avec la solution analytique $y(x) = 2\,e^x - x - 1$.