Méthodes numériques pour l'ingénieur (Polytech'Lille, CM3)

Travaux Dirigés

Enrico Calzavarini (bureau F128), Stefano Berti (bureau F110)

Corrigé du TD 1 : Equations non linéaires et trascendantes

Exercice 1

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation: $x = -\log x$ par la méthode des approximations successives.

a) Montrer qu'avec le choix simple $F(x) = -\log x$ et $x = F(x)$ la méthode n'est pas convergente.

b) Comment on peut remédier à cette divergence?

c) Calculer la solution de manière itérative. On dénotera x_n l'approximation à l'itération n de la racine de l'équation et on utilisera les critères d'arrêt: $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon_1$ et $|f(x_n)| < \epsilon_2$, avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,05$.

Solution :

a) La condition $|F'(x)| < 1$ en $\mathbb{R}^+$ est suffisante pour la convergence de la méthode.
Ici $|F'(x)| = 1/|x| < 1$ si $|x| = x > 1$. Donc pour $0 < x < 1$ la méthode est divergente.

b) Nous pouvons transformer l'équation comme suit:

$$x = -\log x$$

$$-x = \log x$$

$$e^{-x} = x.$$

Alors $F(x) = e^{-x}$ et $x_{n+1} = e^{-x_n}$. On observe que $F'(x) = -e^{-x} \Rightarrow |F'(x)| < 1$ pour $0 < x < +\infty$.
Donc, en modifiant la forme de l'équation on peut faire converger la méthode des approximations successives.

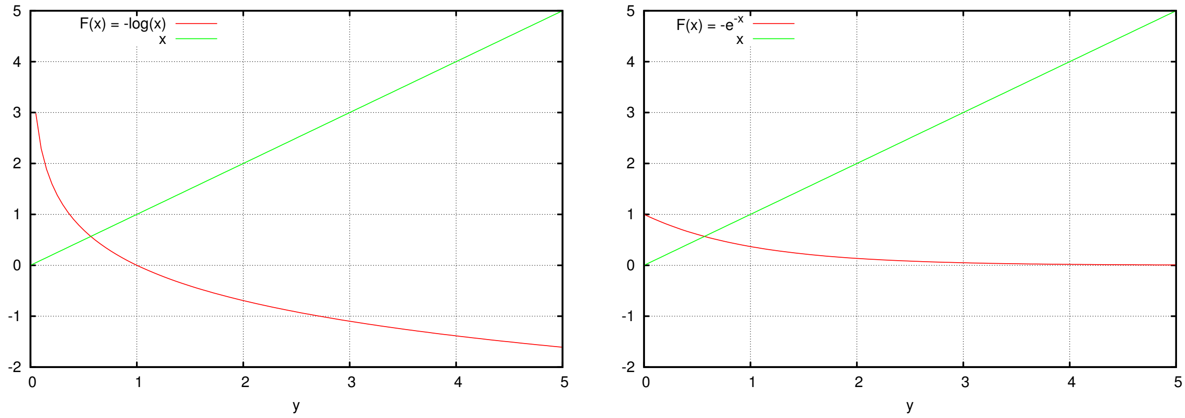

FIG. 1 Le cas divergent (à gauche) et le cas convergent (à droite).

c) Itérations méthode des approximations successives:

$$x_{n+1} = e^{-x_n}$$

Critères d'arrêt:

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon_1 = 0,05 \quad |f(x_n)| < \epsilon_2 = 0,05,$$

avec $f(x) = x - e^{-x}$.

n	x_n	$F(x_n)$	$\lvert f(x_n)\rvert = \lvert x_n - F(x_n)\rvert$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert = \lvert f(x_{n-1})\rvert$
0	$x_0 = 1/2$	$F(x_0) \simeq 0,6065$	$\lvert f(x_0)\rvert \simeq 0,1065$	
1	$x_1 \simeq 0,6065$	$F(x_1) \simeq 0,5453$	$\lvert f(x_1)\rvert \simeq 0,0612$	$\lvert x_1 - x_0\rvert \simeq 0,1065$
2	$x_2 \simeq 0,5453$	$F(x_2) \simeq 0,5797$	$\lvert f(x_2)\rvert \simeq 0,0344$	$\lvert x_2 - x_1\rvert \simeq 0,0612$
3	$x_3 \simeq 0,5797$	$F(x_3) \simeq 0,5601$	$\lvert f(x_3)\rvert \simeq 0,0196$	$\lvert x_3 - x_2\rvert \simeq 0,0344$

Exercice 2

Soit a un nombre réel positif. On se propose de calculer une valeur approchée de $\sqrt{a}$ en appliquant la méthode de Newton-Raphson à la fonction $f(x) = x^2 - a$.

a) Déterminer la relation de récurrence liant x_n à x_{n-1}.

b) On cherche $\sqrt{16}$. Pour la valeur initiale $x_0 = 16$, faites 3 itérations en utilisant le schéma itératif obtenu (au point **a**) et calculez l'erreur relative par rapport à la valeur exacte.

Solution :

a) $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Ici $f(x) = x^2 - a$, $f'(x) = 2x$
et donc:

$$F(x) = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{x^2 + a}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

La relation de récurrence est:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right); \quad n \geq 1.$$

b) Itérations:

$$x_0 = 16$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{16}{x_0}\right) = \frac{1}{2}(16 + 1) = \frac{17}{2} \simeq 8,5$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{2} + \frac{32}{17}\right) = \frac{353}{68} \simeq 5,2$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{353}{68} + \frac{68 \cdot 16}{353}\right) = \frac{353^2 + 68^2 \cdot 16}{2 \cdot 68 \cdot 353} \simeq 4,13666472.$$

Erreur relative:

$$x^* = 4 \Rightarrow \epsilon_3 = \left|\frac{x^* - x_3}{x^*}\right| = \left|\frac{4 - x_3}{4}\right| = 0,03416618 \simeq 3,4\%.$$

Exercice 3

De combien d'itérations a-t-on besoin pour trouver la solution de l'équation $3x + \sin(x) - e^x = 0$ dans l'intervalle $[-0,5; 1,3]$ par la méthode de dichotomie avec une précision de 5 chiffres décimaux? Le calcul de la racine n'est pas demandé.

Solution :

Intervalle initial: $I_0 = [-0,5; 1,3]$, précision: $\epsilon = 10^{-5}$.
Dans la méthode de dichotomie: $I_n = \dfrac{I_0}{2^n}$. Ici on cherche n pour que: $I_n < \epsilon$.
Donc:

$$I_n = I_0/2^n < \epsilon$$

$$\log I_0 - n \ \log 2 < \log \epsilon$$

$$n > \frac{\log I_0 - \log \epsilon}{\log 2} = \frac{\log(I_0/\epsilon)}{\log 2}$$

$$n > \frac{\log(1,8 \cdot 10^5)}{\log 2} \simeq 17,45$$

$$n \in \mathcal{N}^+ \ \Rightarrow \ n = 18$$

Exercice 4

On cherche la solution de l'équation non linéaire $x = e^{1/x}$ dans $\mathbb{R}^+$ par la méthode de Newton-Raphson. On peut écrire cette équation de manières différentes :

(1) $f_1(x) = x - e^{1/x} = 0$;

(2) $f_2(x) = 1 - x\log x = 0$, si on exprime l'équation initiale sous forme logarithmique.

Pour résoudre ces équations, on utilise la formule itérative $x_{n+1} = F(x_n)$.

a) Écrire explicitement les formules itératives de la méthode de Newton-Raphson correspondant aux expressions (1) et (2) ci-dessus, permettant de calculer x_{n+1} en fonction de x_n.

b) Calculer les 3 valeurs approchées x_1, x_2, x_3 de la solution, obtenues en applicant les formules (1) et (2) en partant de la valeur initiale $x_0 = 1,7$.

c) Combien d'itérations faut-il prévoir pour obtenir la racine de cette équation par la méthode de dichotomie avec la précision $\epsilon = 10^{-6}$, si l'intervalle initial est $[1,4;2]$?

Solution :

a) En général, à partir de $f(x)$, dans la méthode de Newton-Raphson on construit la fonction $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

- Cas (1):

$$f_1(x) = x - e^{1/x}, \quad f_1'(x) = 1 + \frac{e^{1/x}}{x^2} \Rightarrow F_1(x) = \frac{e^{1/x}x(x+1)}{x^2 + e^{1/x}}.$$

Donc la formule itérative est:

$$x_{n+1} = F_1(x_n) = \frac{e^{1/x_n}x_n(x_n+1)}{x_n^2 + e^{1/x_n}}.$$

- Cas (2):

$$f_2(x) = 1 - x\log x, \quad f_2'(x) = -(\log x + 1) \Rightarrow F_2(x) = \frac{x+1}{1+\log x}$$

Donc la formule itérative est:

$$x_{n+1} = F_2(x_n) = \frac{x_n+1}{1+\log x_n}$$

b) • Cas (1):

$$x_{n+1} = \frac{e^{1/x_n}x_n(x_n+1)}{x_n^2 + e^{1/x_n}},$$

$x_0 = 1,7$; $x_1 = 1,762107$; $x_2 = 1,763222$; $x_3 = 1,763223$.

- Cas (2):

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{1 + \log x_n},$$

$x_0 = 1,7$; $x_1 = 1,763981$; $x_2 = 1,763223$; $x_3 = 1,763223$.

c) Intervalle initial: $I_0 = [1,4;2]$, précision: $\epsilon = 10^{-6}$.

$$n > \frac{\log I_0/\epsilon}{\log 2} \Rightarrow n > 19,2 \Rightarrow n = 20 \text{ itérations}$$

Exercice 5

Montrer analytiquement et avec un graphique que pour le problème $x^3 - 2x + 2 = 0$, avec $x_0 = 0$ comme donnée initiale, la méthode de Newton-Raphson entre dans une boucle infinie.

Solution :

$f(x) = x^3 - 2x + 2$, le problème est donc $f(x) = 0$ avec $x_0 = 0$.

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 2x + 2}{3x^2 - 2} = \frac{2x^3 - 2}{3x^2 - 2}$$

$$x_{n+1} = \frac{2\ x_n^3 - 2}{3\ x_n^2 - 2}$$

Donc:

$$x_0 = 0\ ,\ \ x_1 = \frac{2\ x_0^3 - 2}{3\ x_0^2 - 2} = \frac{-2}{-2} = 1\ ,\ \ x_2 = \frac{2\ x_1^3 - 2}{3\ x_1^2 - 2} = \frac{2 - 2}{3 - 2} = 0.$$

Cela donne une boucle infinie. Plus en général, on obtient:

$$x_{2k+1} = 1,\ x_{2k} = 0;\ k \in \mathbb{Z}^+,$$

pour les solutions approchées d'indices impair et pair, repsectivement.

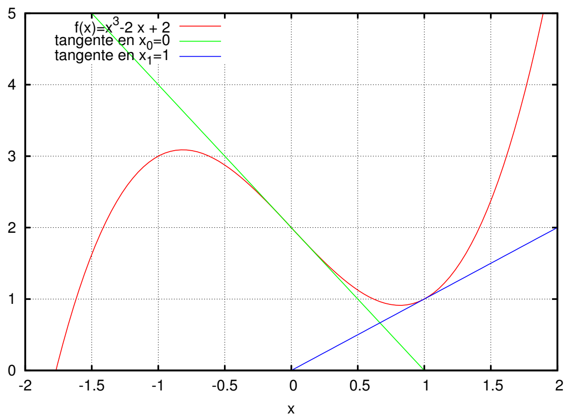

FIG. 2 Explication graphique de la méthode de la tangente.

Exercice 6

Combien d'itérations sont nécessaires pour trouver la racine d'une fonction du type $f(x) = ax + b$ avec la méthode de la corde (et une précision donnée ϵ)?

Solution :

En général pour la méthode de la corde on a:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}; \quad n \geq 1.$$

Dans ce cas:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}(a\ x_n + b) - x_n(a\ x_{n-1} + b)}{(a\ x_n + b) - (a\ x_{n-1} + b)},$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\ b - x_n\ b}{a\ x_n - a\ x_{n-1}} = \frac{b(x_{n-1} - x_n)}{a(x_n - x_{n-1})} = -\frac{b}{a}.$$

La dernière expression ne dépend pas de n, donc $x_n = -\frac{b}{a}$ avec $n = 2, 3, 4, ...$

En d'autres termes: $f(x_2) = f(-b/a) = 0\ \forall\epsilon$, car on obtient la solution exacte $x^* = -b/a$.

Donc on peut conclure que seulement une itération est nécessaire.

Exercice 7 (bonus)

Considérons la résolution numérique de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Richmond. Cette méthode peut être résumée comme suit. Supposons $f(x)$ continue et deux fois dérivable dans un domaine donné. La relation de récurrence permettant de calculer la racine de l'équation est alors :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)f(x_n)}{g(x_n)f'(x_n) + h(x_n)f(x_n)}$$

où $g(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions arbitraires de x, et $f'(x)$ est la dérivée de f.

a) Montrer que la méthode est au moins du second ordre.

b) Quelle relation doivent vérifier g et h pour que l'ordre de convergence de la méthode soit $p = 3$?

Solution :

a) On pose $F(x) = x - \frac{g\ f}{g\ f' + h\ f}$.

Le calcul de $F'(x)$ donne:

$$F'(x) = 1 - \frac{g'\ f + g\ f'}{g\ f' + h\ f} + \frac{g\ f\ (g\ f'' + g'\ f' + h\ f' + h'\ f)}{(g\ f' + h\ f)^2}.$$

Vu que $f(x) = 0$ pour $x = x^*$, on a $F'(x^*) = 1 - \frac{g\ f'}{g\ f'} + 0 = 1 - 1 + 0 = 0$.

$F'(x^*) = 0 \Rightarrow$ la méthode est au moins d'ordre 2.

b) Le calcul de la dérivée seconde $F''(x)$ donne, pour $x = x^*$:

$$F''(x^*) = \frac{f''}{f'} + 2\frac{h}{g},$$

où on a utilisé encore $f(x^*) = 0$.

Donc si h et g sont tels que $2h/g = -f''/f'$ on a $F''(x^*) = 0$ et l'ordre de convergence de la méthode est $p = 3$.