Méthodes numériques pour l'ingénieur (Polytech'Lille, CM3)

Travaux Dirigés, Année 2015-2016

Enrico Calzavarini (bureau F128), Stefano Berti (bureau F110)

Corrigé du TD 2 : Equations différentielles ordinaires

Exercice 1

On considère le problème de Cauchy: $y' = \lambda y;\ y(0) = y_0$.

a) Montrer que la méthode d'Euler explicite appliquée à ce problème donne la solution

$$y_n = y_0\ (1 + h\lambda)^n$$

b) Montrer que la méthode d'Euler implicite appliquée à ce problème donne la solution

$$y_n = y_0 \frac{1}{(1 - h\lambda)^n}$$

c) Nous posons $\lambda = 3$ et $y_0 = 1/2$. Comparer pour $x = 1$ la solution exacte du problème de Cauchy avec les résultats des deux méthodes ci-dessus (avec le choix du pas de discrétisation $h = 1/10$). Quelle méthode donne le meilleur résultat?

d) On pose $\lambda = 1$, $y_0 = 1$ et $h = 2$. Comparer les solutions obtenues par chacune des deux méthodes. Quelle méthode vous paraît la meilleure?

Solution :

a) Euler explicite

$y' = f(x, y)$, $y' = \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h}$, $f(x, y) = f(x_n, y_n)$

donc:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

ici $f(x_n, y_n) = \lambda y_n$, donc

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n$$

si $n = 1 \;\Rightarrow\; y_1 = (1 + h\lambda)y_0$

si $n = 2 \;\Rightarrow\; y_2 = (1 + h\lambda)y_1 = (1 + h\lambda)^2 y_0$

d'où $y_n = (1 + h\lambda)^n y_0$

plus en général: $y_n = (1 + h\lambda)y_{n-1} = (1 + h\lambda)^2 y_{n-2} = ... = (1 + h\lambda)^n y_0$

b) Euler implicite

$y' = f(x, y)$, $y' = \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h}$, $f(x, y) = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

donc:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

ici $f(x_{n+1}, y_{n+1}) = \lambda y_{n+1}$, donc

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1}$$

Cette relation est implicite, mais elle peut être facilement rendue explicite grâce au fait que $f(x, y)$ est une fonction linéaire de y. Dans ce cas particulier, il n'est pas nécessaire de recourir à une méthode itérative pour calculer y_{n+1}:

$$(1 - h\lambda)y_{n+1} = y_n$$

et donc

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_n.$$

Comme dans le cas précédent, par itération nous obtenons:

$$y_n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^n} y_0$$

c) La solution analytique est $y(x) = C\, e^{\lambda\; x}$ avec $y_0 = y(0) = C$. Donc:

$$y(x) = y_0\, e^{\lambda x}$$

avec $y_0 = 1/2$ et $\lambda = 3 \Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{2}\, e^{3x}$.

En $x = 1$ on a $y(1) = \dfrac{1}{2}\, e^3 = 10.043$.

Euler explicite: $n = 10$ et $h = 1/10$ $(x = 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}\,(1 + 0.1 \cdot 3)^{10} = 6.893$

Euler implicite: $n = 10$ et $h = 1/10$ $(x = 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}\,(1 - 0.1 \cdot 3)^{-10} = 17.700$

Meilleur résultat: méthode explicite, dû à la forme de la fonction $f(x, y) = \lambda y$.

d) $\lambda = 1$, $y_0 = 1$, $h = 2$

En $x = 4$ on a $y(4) = 1 \cdot e^4 \simeq (2.718)^4 \simeq 55$.

Euler explicite: $n = 2$ et $h = 2$ $(x = 4) \Rightarrow y = 1 \cdot (1 + 2 \cdot 1)^2 = 9$

Euler implicite: $n = 2$ et $h = 2$ $(x = 4) \Rightarrow y = 1 \cdot (1 - 2 \cdot 1)^{-2} = (-1)^{-2} = 1$

Meilleur résultat: méthode explicite, dû à la forme de la fonction $f(x, y) = \lambda y$. En fait, la solution approchée donnée par le schéma d'Euler explicite reste "raisonnable" même pour des pas de discrétisation relativement grands. Ici, la grande différence par rapport à la solution exacte est due au fait que $h > 1/\lambda$, donc avec cette valeur du pas de discrétisation on ne peut pas réellement résoudre les variations de y en fonction de x.

En ce qui concerne le schéma implicite, d'une part il n'est pas défini pour $h = 1$, d'autre part, si l'on choisit un pas de discrétisation h proche de 1 (inférieurement ou supérieurement), la solution approchée "explose" rapidement! Enfin, pour $h = 2$, comme ici, on perd la propriété de positivité de la solution exacte!

Exercice 2

On doit résoudre l'équation $y' = \sin y$ sur l'intervalle $[0, 2]$ avec $y(0) = 1$. Pour la résolution, utiliser la méthode d'Euler implicite à l'aide d'un processus itératif : considérer **a)** la méthode d'approximations successives et **b)** la méthode de Newton-Raphson. Écrire les schémas itératifs.

Solution :

Le schéma d'Euler implicite est $y_{k+1} = y_k + h\ \sin y_{k+1}$. Cette relation est implicite, et elle ne peut pas être rendue explicite car $f(x, y)$ est une fonction non linéaire de y. Dans ce cas il est donc nécessaire de recourir à une méthode itérative pour calculer y_{k+1} à chaque itération k :

a) Méthode d'approximations successives (MAS)

$y_{k+1} = F(y_{k+1})$ avec $F(y_{k+1}) = y_k + h\ \sin y_{k+1}$.

Le schéma itératif est:

$$y_{k+1}^{(m+1)} = F\left(y_{k+1}^{(m)}\right) = y_k + h\ \sin y_{k+1}^{(m)}$$

où m est l'indice d'itération de la MAS.

Dans la MAS, la valeur initiale correspondant à $m = 0$ (c'est-à-dire la première estimation de y_{k+1}), est $y_{k+1}^{(0)} = y_k$.

Enfin nous décidons de terminer les itérations lorsque le critère d'arrêt sur l'erreur relative est respecté

$$\left|y_{k+1}^{(m+1)} - y_{k+1}^{(m)}\right| \leq \epsilon \left|y_{k+1}^{(m+1)}\right|$$

avec ϵ petit : $\epsilon = 10^{-6}$.

b) Méthode de Newton-Raphson

$y_{k+1} = F(y_{k+1})$ avec $F(y_{k+1}) = y_k + h\ \sin y_{k+1}$.

Pour chaque itération k il faut chercher le zéro y_{k+1} de la fonction $g(y_{k+1})$:

$g(y_{k+1}) = 0$ avec $g(y_{k+1}) = y_{k+1} - y_k - h\ \sin y_{k+1}$.

La méthode de Newton-Raphson donne, donc, le schéma itératif suivant qui permet de déterminer y_{k+1}:

$$y_{k+1}^{(m+1)} = y_{k+1}^{(m)} - \frac{g\left(y_{k+1}^{(m)}\right)}{g'\left(y_{k+1}^{(m)}\right)},$$

où m est l'indice d'itération de la méthode de Newton-Raphson.

Vu que $g'\left(y_{k+1}^{(m)}\right) = 1 - h\cos y_{k+1}$, on obtient :

$$y_{k+1}^{(m+1)} = y_{k+1}^{(m)} - \frac{y_{k+1}^{(m)} - y_k - h\ \sin y_{k+1}^{(m)}}{1 - h\ \cos y_{k+1}^{(m)}}.$$

Nous pouvons remarquer que cette procédure est équivalente à chercher le point fixe de $y_{k+1} = G\left(y_{k+1}\right)$:

$$y_{k+1}^{(m+1)} = G\left(y_{k+1}^{(m)}\right) \quad \text{avec} \quad G\left(y_{k+1}^{(m)}\right) = y_{k+1}^{(m)} - \frac{g\left(y_{k+1}^{(m)}\right)}{g'\left(y_{k+1}^{(m)}\right)}$$

Finalment, on peut montrer que la méthode de Newton-Raphson converge plus vite que la MAS.

Exercice 3

Transformez l'équation différentielle

$$g''(x) + \frac{g'(x)}{x} + g(x) = 0,$$

associée aux conditions initiales $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$, afin d'obtenir un système de 2 équations d'ordre 1 du type:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} = 0).$$

Formulez les conditions initiales du problème.

Solution :

On pose $z(x) = g'(x) \quad \Rightarrow \quad z'(x) + \frac{z(x)}{x} + g(x) = 0$, donc

$$\begin{cases} g'(x) = z(x) \\ z'(x) = -\frac{z(x)}{x} - g(x) \end{cases}$$

Maintenant on définit le vecteur $\mathbf{y}(x) = \binom{g(x)}{z(x)}$ et $\mathbf{f}(x) = \binom{z(x)}{-\frac{z(x)}{x} - g(x)}$ d'où :

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x)$$

avec les conditions initiales $\mathbf{y}(0) = \binom{g(0)}{z(0)} = \binom{1}{2}$

Exercice 4

Calculer les deux premières solutions approchées y_1 et y_2 (pour $x = h$ et $x = 2h$ respectivement) de l'équation

$$y' = f(x, y(x)) \qquad \text{où} \qquad f(x, y(x)) = x + y$$

pour la condition initiale $x_0 = 0$, $y(x_0) = y_0 = 1$ et le pas $h = 1$, en appliquant (séparément) les deux schémas itératifs ci-dessous:

a) la méthode Runge-Kutta d'ordre 2 standard

$$y_{n+1} = y_n + h\ f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h\ f(x_n, y_n))$$

b) une variante de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h\left[f(x_n, y_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n))\right]$$

Comparer les résultats obtenus avec la solution analytique $y(x) = 2\,e^x - x - 1$.

Solution :

a)

$$y_{n+1} = y_n + h\ f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h\ f(x_n, y_n)\right)$$

où $f(x, y) = x + y$.

pour $n = 1 \Rightarrow y_1 = y_0 + h\ f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}h\ f(x_0, y_0)\right)$

$$= 1 + 1 \cdot f\left(0 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = 1 + 1 \cdot f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

pour $n = 2 \Rightarrow y_2 = y_1 + h\ f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}h\ f(x_1, y_1)\right)$

$$= 3 + 1 \cdot f\left(1 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{4}{2}\right) = 3 + 1 \cdot f\left(\frac{3}{2}, 5\right) = 3 + \frac{3}{2} + 5 = \frac{19}{2} = 9.5$$

b)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h\left[f(x_n, y_n) + 3f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n)\right)\right]$$

pour $n = 1 \Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{1}{4}\left[f(x_0, y_0) + 3f\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}hf(x_0, y_0)\right)\right] =$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left[f(0,1) + 3f\left(0 + \frac{2}{3}, 1 + \frac{2}{3}f(0,1)\right)\right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left[1 + 3f\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)\right] = 1 + \frac{1}{4}\left[1 + 3\frac{7}{3}\right] = 1 + \frac{1}{4}8 = 3$$

pour $n = 2 \Rightarrow y_2 = y_1 + \frac{1}{4}\left[f(x_1, y_1) + 3f\left(x_1 + \frac{2}{3}h, y_1 + \frac{2}{3}hf(x_1, y_1)\right)\right] =$

$$= 3 + \frac{1}{4}\left[f(1,3) + 3f\left(1 + \frac{2}{3}, 3 + \frac{2}{3}f(1,3)\right)\right] =$$

$$3 + \frac{1}{4}\left[4 + 3f\left(\frac{5}{3}, \frac{17}{3}\right)\right] =$$

$$= 3 + 1 + \frac{3}{4}\frac{22}{3} = 4 + \frac{11}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$$

La solution exacte est

$$y(x) = 2\,e^x - x - 1$$

$$y(1) = 2\,e - 1 - 1 = 2\,e - 2 \simeq 3.44$$

$$y(2) = 2\,e^2 - 2 - 1 = 2\,e^2 - 3 \simeq 11.78$$