Méthodes numériques pour l'ingénieur (Polytech'Lille, CM3)

Travaux Dirigés, Année 2015-2016

Enrico Calzavarini (bureau F128), Stefano Berti (bureau F110)

TD 1 : Equations non linéaires

Exercice 1

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation: $x = -\log x$ (où $\log x$ est le logarithme népérien de x) par la méthode des approximations successives.

a) Montrer qu'avec le choix simple $F(x) = -\log x$ et $x = F(x)$ la méthode n'est pas convergente.

b) Comment on peut remédier à cette divergence?

c) Calculer la solution de manière itérative en partant de la valeur initiale $x_0 = 1/2$. On dénotera x_n l'approximation à l'itération n de la racine de l'équation et on utilisera les critères d'arrêt: $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon_1$ et $|f(x_n)| < \epsilon_2$, avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,05$.

Exercice 2

Soit a un nombre réel positif. On se propose de calculer une valeur approchée de $\sqrt{a}$ en appliquant la méthode de Newton-Raphson à la fonction $f(x) = x^2 - a$.

a) Déterminer la relation de récurrence liant x_n à x_{n-1}.

b) On cherche $\sqrt{16}$. Pour la valeur initiale $x_0 = 16$, faites 3 itérations en utilisant le schéma itératif obtenu (au point **a**) et calculez l'erreur relative par rapport à la valeur exacte.

Exercice 3

De combien d'itérations a-t-on besoin pour trouver la solution de l'équation $3x + \sin(x) - e^x = 0$ dans l'intervalle $[-0,5; 1,3]$ par la méthode de dichotomie avec une précision de 5 chiffres décimaux? Le calcul de la racine n'est pas demandé.

Exercice 4

On cherche la solution de l'équation non linéaire $x = e^{1/x}$ dans $\mathbb{R}^+$ par la méthode de Newton-Raphson. On peut écrire cette équation de manières différentes :

(1) $f_1(x) = x - e^{1/x} = 0$;

(2) $f_2(x) = 1 - x \log x = 0$, si on exprime l'équation initiale sous forme logarithmique.

Pour résoudre ces équations, on utilise la formule itérative $x_{n+1} = F(x_n)$.

a) Écrire explicitement les formules itératives de la méthode de Newton-Raphson correspondant aux expressions (1) et (2) ci-dessus, permettant de calculer x_{n+1} en fonction de x_n.

b) Calculer les 3 valeurs approchées x_1, x_2, x_3 de la solution, obtenues en applicant les formules (1) et (2) en partant de la valeur initiale $x_0 = 1,7$.

c) Combien d'itérations faut-il prévoir pour obtenir la racine de cette équation par la méthode de dichotomie avec la précision $\epsilon = 10^{-6}$, si l'intervalle initial est $[1,4; 2]$?

Exercice 5

Montrer analytiquement et avec un graphique que pour le problème $x^3 - 2x + 2 = 0$, avec $x_0 = 0$ comme donnée initiale, la méthode de Newton-Raphson entre dans une boucle infinie.

Exercice 6

Combien d'itérations sont nécessaires pour trouver la racine d'une fonction du type $f(x) = ax + b$ avec la méthode de la corde (et une précision donnée ϵ)?

Exercice 7 (bonus)

Considérons la résolution numérique de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Richmond. Cette méthode peut être résumée comme suit. Supposons $f(x)$ continue et deux fois dérivable dans un domaine donné. La relation de récurrence permettant de calculer la racine de l'équation est alors :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)f(x_n)}{g(x_n)f'(x_n) + h(x_n)f(x_n)}$$

où $g(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions arbitraires de x, et $f'(x)$ est la dérivée de f.

a) Montrer que la méthode est au moins du second ordre.

b) Quelle relation doivent vérifier g et h pour que l'ordre de convergence de la méthode soit $p = 3$?